ЛЕКЦИЯ 2	ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

Гидравлика делится на два раздела: гидростатика и гидродинамика. Гидродинамика является более обширным разделом и будет рассмотрена в последующих лекциях. В этой лекции будет рассмотрена гидростатика.

Гидростатикой называется раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы равновесия жидкости и их практическое применение.

2.1. Гидростатическое давление

В покоящейся жидкости всегда присутствует сила давления, которая называется гидростатическим давлением. Жидкость оказывает силовое воздействие на дно и стенки сосуда. Частицы жидкости, расположенные в верхних слоях водоема, испытывают меньшие силы сжатия, чем частицы жидкости, находящиеся у дна.

Рассмотрим резервуар с плоскими вертикальными стенками, наполненный жидкостью (рис.2.1, *а*). На дно резервуара действует сила P равная весу налитой жидкости $G = \gamma V$, т.е. $P = G$.

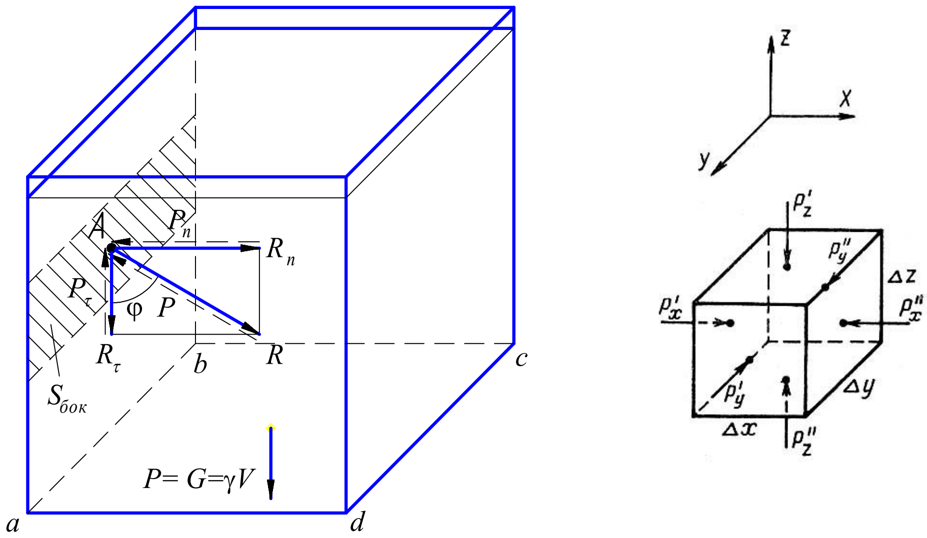
Если эту силу P разделить на площадь дна S_{abcd}, то мы получим *среднее гидростатическое давление*, действующее на дно резервуара

$$P_{cp} = \frac{P}{S_{abcd}}. \qquad (2.1)$$

Гидростатическое давление обладает свойствами.

Свойство 1. *В любой точке жидкости гидростатическое давление перпендикулярно площадке касательной к выделенному объему и действует внутрь рассматриваемого объема жидкости.*

Для доказательства этого утверждения вернемся к рис.2.1, *а*. Выделим на боковой стенке резервуара площадку $S_{бок}$ (заштриховано). Гидростатическое давление действует на эту площадку в виде распределенной силы, которую можно заменить одной равнодействующей, которую обозначим P. Предположим, что равнодействующая гидростатического давления P, действующая на эту площадку, приложена в точке A и направлена к ней под углом φ (на рис. 2.1 обозначена штриховым отрезком со стрелкой). Тогда сила реакции стенки R на жидкость будет иметь ту же самую величину, но противоположное направление (сплошной отрезок со стрелкой). Указанный вектор R можно разложить на два составляющих вектора: нормальный R_n (перпендикулярный к заштрихованной площадке) и касательный R_τ к стенке.



а) *б*)

Рис. 2.1. Схема, иллюстрирующая свойства гидростатического давления
а – первое свойство; *б* – второе свойство

Сила нормального давления R_n вызывает в жидкости напряжения сжатия. Этим напряжениям жидкость легко противостоит. Сила R_τ , действующая на жидкость вдоль стенки, должна была бы вызвать в жидкости касательные напряжения вдоль стенки и частицы должны были бы перемещаться вниз. Но так как жидкость в резервуаре находится в состоянии покоя, то составляющая R_τ отсутствует. Отсюда можно сделать вывод первого свойства гидростатического давления.

Свойство 2. *Гидростатическое давление неизменно во всех направлениях.*

В жидкости, заполняющей какой-то резервуар, выделим элементарный[1] кубик с очень малыми сторонами Δx, Δy, Δz (рис.2.1, *б*). На каждую из боковых поверхностей будет давить сила гидростатического давления, равная произведению соответствующего давления P_x, P_y, P_z на элементарные площади. Обозначим вектора давлений, действующие в положительном направлении (согласно указанным координатам) как P'_x, P'_y, P'_z, а вектора давлений, действующие в обратном направлении

[1] Термин «элементарный» означает очень маленькое значение, которое стремится приблизиться к нулю. В данном случае это линейный размер сторон кубика.

соответственно P''_x, P''_y, P''_z. Поскольку кубик находится в равновесии, то можно записать равенства

$$P'_x\Delta y\Delta z = P''_x\Delta y\Delta z;$$

$$P'_y\Delta x\Delta z = P''_y\Delta x\Delta z;$$

$$P'_z\Delta x\Delta y + \gamma\Delta x\Delta y\Delta z = P''_z\Delta x\Delta y,$$

где γ - удельный вес жидкости;

$\Delta x\Delta y\Delta z$ – объем кубика.

Сократив полученные равенства, найдем, что

$$P'_x = P''_x; \quad P'_y = P''_y; \quad P'_z + \gamma\Delta z = P''_z.$$

Членом третьего уравнения $\gamma\Delta z$, как бесконечно малым по сравнению с P'_z и P''_z, можно пренебречь и тогда окончательно

$$P'_x = P''_x; \quad P'_y = P''_y; \quad P'_z = P''_z.$$

Вследствие того, что кубик не деформируется (не вытягивается вдоль одной из осей), надо полагать, что давления по различным осям одинаковы, т.е.

$$P'_x = P'_y = P'_z = P''_x = P''_y = P''_z. \tag{2.2}$$

Это доказывает второй свойство гидростатического давления.

Свойство 3. *Гидростатическое давление в точке зависит от ее координат в пространстве.*

Это положение не требует специального доказательства, так как ясно, что по мере увеличения погружения точки давление в ней будет возрастать, а по мере уменьшения погружения уменьшаться. Третье свойство гидростатического давления может быть записано в виде

$$P = f(x, y, z).$$

2.2. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим распространенный случай равновесия жидкости, когда на нее действует только одна массовая сила – сила тяжести, и получим уравнение, позволяющее находить гидростатическое давление в любой точке рассматриваемого объема жидкости. Это уравнение называется *основным уравнением гидростатики*.

Пусть жидкость содержится в сосуде (рис.2.2) и на ее свободную поверхность действует давление P_0. Найдем гидростатическое давление P в произвольно взятой точке M, расположенной на глубине h. Выделим около точки M элементарную горизонтальную площадку dS и построим на ней вертикальный цилиндрический объем жидкости высотой h. Рассмотрим условие равновесия указанного объема жидкости, выделенного из общей массы жидкости. Давление жидкости на нижнее основание цилиндра теперь будет внешним и направлено по нормали внутрь объема, т.е. вверх.

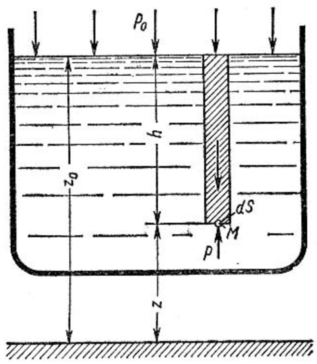


Рис. 2.2. Схема для вывода основного уравнения гидростатики

Запишем сумму сил, действующих на рассматриваемый объем в проекции на вертикальную ось:

$$PdS - P_0 dS - \rho gh\, dS = 0.$$

Последний член уравнения представляет собой вес жидкости, заключенный в рассматриваемом вертикальном цилиндре объемом $h \cdot dS$. Силы давления по боковой поверхности цилиндра в уравнение не входят, т.к. они перпендикулярны к этой поверхности и их проекции на вертикальную ось равны нулю. Сократив выражение на dS и перегруппировав члены, найдем

$$P = P_0 + h\rho g = P_0 + h\gamma\,. \qquad (2.3)$$

Полученное уравнение называют основным уравнением гидростатики. По нему можно посчитать давление в любой точке покоящейся жидкости. Это давление, как видно из уравнения, складывается из двух величин: давления P_0 на внешней поверхности жидкости и давления, обусловленного весом вышележащих слоев жидкости.

Из основного уравнения гидростатики видно, что какую бы точку в объеме всего сосуда мы не взяли, на нее всегда будет действовать давление, приложенное к внешней поверхности P_0. Другими словами давление, приложенное к внешней поверхности жидкости, передается всем точкам этой жидкости по всем направлениям одинаково. Это положение известно под названием *закона Паскаля*.

Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется *поверхностью уровня* (подробно рассмотрим в п.2.6). В обычных условиях поверхности уровня представляют собой горизонтальные плоскости.

2.3. Давление жидкости на плоскую наклонную стенку

Пусть мы имеем резервуар с наклонной правой стенкой, заполненный жидкостью с удельным весом γ. Ширина стенки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (от читателя), равна *b* (рис.2.3). Стенка условно показана развернутой относительно оси *AB* и заштрихована на рисунке. Построим график изменения избыточного гидростатического давления на стенку *AB*.

Так как избыточное гидростатическое давление изменяется по линейному закон *P*=ρ*gh*, то для построения графика, называемого эпюрой давления, достаточно найти давление в двух точках, например *A* и *B*.

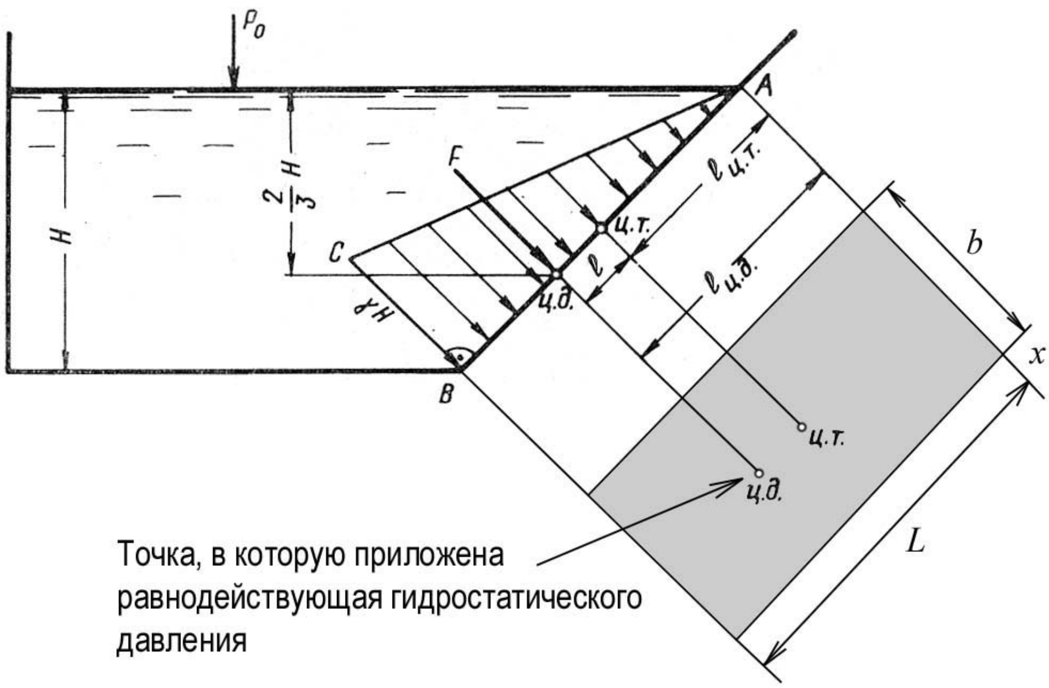


Рис. 2.3. Схема к определению равнодействующей гидростатического давления на плоскую поверхность

Избыточное гидростатическое давление в точке *A* будет равно

$$P_A = \gamma h = \gamma \cdot 0 = 0.$$

Соответственно давление в точке *B*:

$$P_B = \gamma h = \gamma H,$$

где *H* – глубина жидкости в резервуаре.

Согласно первому свойству гидростатического давления, оно всегда направлено по нормали к ограждающей поверхности. Следовательно, гидростатическое давление в точке B, величина которого равна γH, надо направлять перпендикулярно к стенке AB. Соединив точку A с концом отрезка γH, получим треугольную эпюру распределения давления ABC с прямым углом в точке B. Среднее значение давления будет равно

$$\frac{\gamma H + 0}{2} = \frac{\gamma H}{2}. \tag{2.4}$$

Если площадь наклонной стенки $S=bL$, то равнодействующая гидростатического давления равна

$$F = \frac{\gamma H}{2} S = \gamma S h_c, \tag{2.5}$$

где $h_c = H/2$ – глубина погружения центра тяжести плоской поверхности под уровень жидкости.

Однако точка приложения равнодействующей гидростатического давления *ц.д.* не всегда будет совпадать с центром тяжести плоской поверхности. Эта точка находится на расстоянии ℓ от центра тяжести и равна отношению момента инерции площадки относительно центральной оси к статическому моменту этой же площадки.

$$\ell = \frac{J_{Ax}}{\ell_{ц.т.} S}, \tag{2.6}$$

где J_{Ax} – момент инерции площади S относительно центральной оси, параллельной Ax.

В частном случае, когда стенка имеет форму прямоугольника размерами $b \times L$ и одна из его сторон лежит на свободной поверхности с атмосферным давлением, центр давления *ц.д.* находится на расстоянии $b/3$ от нижней стороны.

2.4. Давление жидкости на цилиндрическую поверхность

Пусть жидкость заполняет резервуар, правая стенка которого представляет собой цилиндрическую криволинейную поверхность ABC (рис.2.4), простирающуюся в направлении читателя на ширину b. Восстановим из точки A перпендикуляр AO к свободной поверхности жидкости. Объем жидкости в отсеке $AOCB$ находится в равновесии. Это значит, что силы, действующие на поверхности выделенного объема V, и силы веса взаимно уравновешиваются.

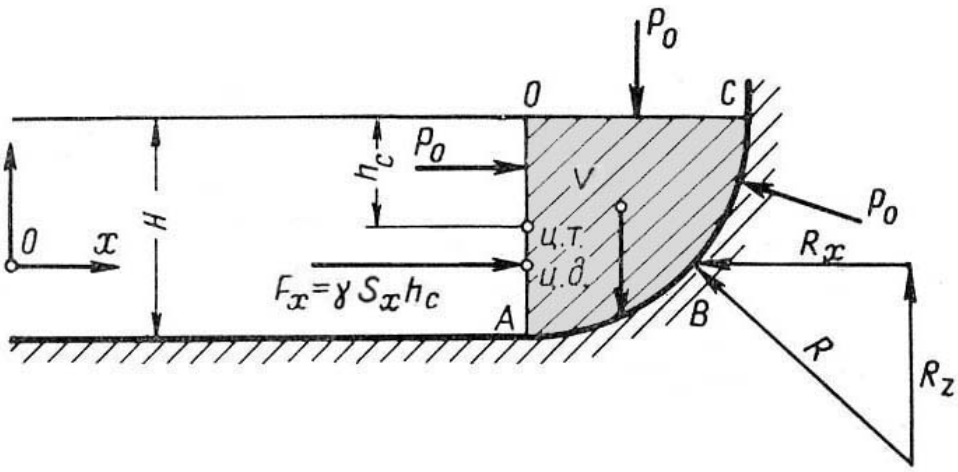


Рис. 2.4. Схема к определению равнодействующей гидростатического давления на цилиндрическую поверхность

Представим, что выделенный объем V представляет собой твердое тело того же удельного веса, что и жидкость (этот объем на рис.2.4 заштрихован). Левая поверхность этого объема (на чертеже вертикальная стенка AO) имеет площадь $S_x = b{\cdot}H$, являющуюся проекцией криволинейной поверхности ABC на плоскость yOz.

Из уравнения (2.5) сила гидростатического давления на площадь S_x равна $F_x = \gamma S_x h_c$.

С правой стороны на отсек будет действовать реакция R цилиндрической поверхности. Пусть точка приложения и направление этой реакции будут таковы, как показано на рис.2.4. Реакцию R разложим на две составляющие R_x и R_z.

Из действующих поверхностных сил осталось учесть только давление на свободной поверхности P_0. Если резервуар открыт, то естественно, что давление P_0 одинаково со всех сторон и поэтому взаимно уравновешивается.

На отсек $ABCO$ будет действовать сила собственного веса $G = \gamma V$, направленная вниз.

Спроецируем все силы на ось Ox:

$$F_x - R_x = 0; \quad \text{откуда} \quad R_x = F_x = \gamma S_x h_c. \qquad (2.7)$$

Теперь спроецируем все силы на ось Oz:

$$R_z - G = 0; \quad \text{откуда} \quad R_z = G = \gamma V. \qquad (2.8)$$

Составляющая силы гидростатического давления по оси Oy обращается в нуль, значит $R_y = F_y = 0$.

Таким образом, реакция цилиндрической поверхности в общем случае равна

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2 + R_y^2},$$

а поскольку реакция цилиндрической поверхности равна равнодействующей гидростатического давления $R=F$, то делаем вывод, что

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2 + F_y^2}. \qquad (2.9)$$

2.5. Закон Архимеда и его приложение

Тело, погруженное (полностью или частично) в жидкость, испытывает со стороны жидкости суммарное давление, направленное снизу вверх и равное весу жидкости в объеме погруженной части тела.

$$P_{выт} = \rho_ж g V_{погр}. \qquad (2.10)$$

Для однородного тела плавающего на поверхности справедливо соотношение

$$\frac{V_{погр}}{V} = \frac{\rho_m}{\rho_ж},$$

где: V – объем плавающего тела;

ρ_m – плотность тела.

Существующая теория плавающего тела довольно обширна, поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь гидравлической сущности этой теории.

Способность плавающего тела, выведенного из состояния равновесия, вновь возвращаться в это состояние называется *остойчивостью*. Вес жидкости, взятой в объеме погруженной части судна называют *водоизмещением*, а точку приложения равнодействующей давления (т.е. центр давления) – *центром водоизмещения*. При нормальном положении судна центр тяжести C и центр водоизмещения d лежат на одной вертикальной прямой $O'-O'$, представляющей ось симметрии судна и называемой осью плавания (рис.2.5).

Пусть под влиянием внешних сил судно наклонилось на некоторый угол α, часть судна KLM вышла из жидкости, а часть $K'L'M$, наоборот, погрузилось в нее. При этом получили новое положении центра водоизмещения d'. Приложим к точке d' подъемную силу R и линию ее действия продолжим до пересечения с осью симметрии $O'-O'$. Полученная точка m называется *метацентром*, а отрезок $mC = h$

называется *метацентрической высотой*. Будем считать h положительным, если точка m лежит выше точки C, и отрицательным – в противном случае.

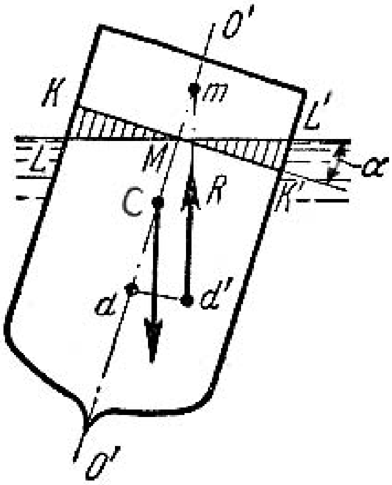


Рис. 2.5. Поперечный профиль судна

Теперь рассмотрим условия равновесия судна:

1) если $h > 0$, то судно возвращается в первоначальное положение;

2) если $h = 0$, то это случай безразличного равновесия;

3) если $h < 0$, то это случай неостойчивого равновесия, при котором продолжается дальнейшее опрокидывание судна.

Следовательно, чем ниже расположен центр тяжести и, чем больше метацентрическая высота, тем больше будет остойчивость судна.

2.6. Поверхности равного давления

Как уже отмечалось выше, поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется *поверхностью уровня* или *поверхностью равного давления*. При неравномерном или непрямолинейном движении на частицы жидкости кроме силы тяжести действуют еще и силы инерции, причем если они постоянны по времени, то жидкость принимает новое положение равновесия. Такое равновесие жидкости называется *относительным покоем*.

Рассмотрим два примера такого относительного покоя.

В первом примере определим поверхности уровня в жидкости, находящейся в цистерне, в то время как цистерна движется по горизонтальному пути с постоянным ускорением a (рис.2.6).

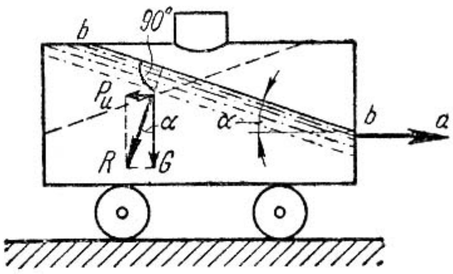


Рис. 2.6. Движение цистерны с ускорением

К каждой частице жидкости массы m должны быть в этом случае приложены ее вес $G = mg$ и сила инерции P_u, равная по величине ma. Равнодействующая этих сил

$$R = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$$

направлена к вертикали под углом α, тангенс которого равен

$$tg\,\alpha = \frac{a}{g}.$$

Так как свободная поверхность, как поверхность равного давления, должна быть нормальна к указанной равнодействующей, то она в данном случае представит собой уже не горизонтальную плоскость, а наклонную, составляющую угол α с горизонтом. Учитывая, что величина этого угла зависит только от ускорений, приходим к выводу, что положение свободной поверхности не будет зависеть от рода находящейся в цистерне жидкости. Любая другая поверхность уровня в жидкости также будет плоскостью, наклоненной к горизонту под углом α. Если бы движение цистерны было не равноускоренным, а равнозамедленным, направление ускорения изменилось бы на обратное, и наклон свободной поверхности обратился бы в другую сторону (см. рис.2.6, пунктир).

В качестве второго примера рассмотрим часто встречающийся в практике случай относительного покоя жидкости во вращающихся сосудах (например, в сепараторах и центрифугах, применяемых для разделения жидкостей). В этом случае (рис.2.7) на любую частицу жидкости при ее относительном равновесии действуют массовые силы: сила тяжести $G = mg$ и центробежная сила $P_u = m\omega^2 r$, где r – расстояние частицы от оси вращения, а ω - угловая скорость вращения сосуда. Поверхность жидкости также должна быть нормальна в каждой точке к равнодействующей этих сил R и представит собой параболоид вращения.

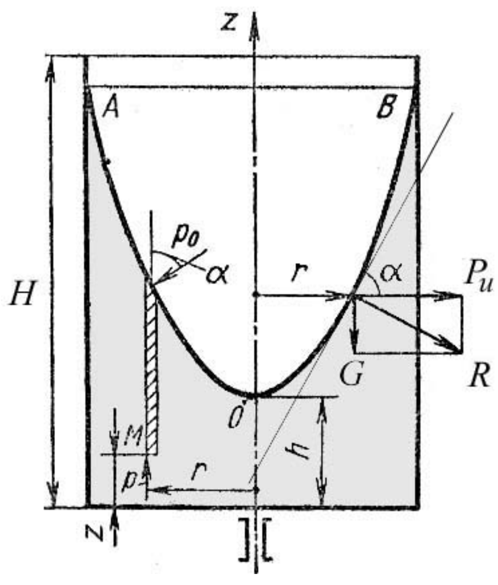


Рис. 2.7. Вращение сосуда с жидкостью

Из чертежа находим

$$tg\,\alpha = \frac{P_u}{G} = \frac{m\omega^2 r}{mg}.$$

С другой стороны:

$$tg\,\alpha = \frac{dz}{dr},$$

где z – координата рассматриваемой точки. Таким образом, получаем:

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr},$$

откуда

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr,$$

или после интегрирования

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C.$$

В точке пересечения кривой *AOB* с осью вращения $r = 0$, $z = h = C$, поэтому окончательно будем иметь

$$z = h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \tag{2.11}$$

т.е. кривая *AOB* является параболой, а свободная поверхность жидкости параболоидом. Такую же форму имеют и другие поверхности уровня.

Для определения закона изменения давления во вращающейся жидкости в функции радиуса и высоты выделим вертикальный цилиндрический объем жидкости с основанием в виде элементарной горизонтальной площадки *dS* (точка *M*) на произвольном радиусе *r* и высоте *z* и запишем условие его равновесия в вертикальном направлении. С учетом уравнения (2.11) будем иметь

$$PdS - \underbrace{\left[h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right]}_{\text{высота цилиндра}} \rho g\, dS - P_0\left(\frac{dS}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha = 0.$$

После сокращений получим

$$P = P_0 + \left[h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right]\rho g. \tag{2.12}$$

Это значит, что давление возрастает пропорционально радиусу *r* и уменьшается пропорционально высоте *z*.